



**Wydział Mechaniczny  
Energetyki i Lotnictwa**

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

# Mechanika I ZNW 108

dr inż. Piotr Lichota

Politechnika Warszawska

Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej

**Politechnika  
Warszawska**



# Sprawy organizacyjne

## Prowadzący ćwiczenia:

- dr inż. Piotr Lichota
  - piotr.lichota@pw.edu.pl
  - konsultacje: piątek 14<sup>15</sup>-15<sup>00</sup>, p.106

## Informacje dla studentów:

- strona internetowa: <http://meil.pw.edu.pl/zm>
  - hasło do plików pdf: [nw108z](#)
- tablica informacyjna obok pokoju 106

## Zasady zaliczenia:

- 3 kolokwia
- suma ocen z kolokwiów podzielona przez trzy
- co najmniej 2 kolokwia zaliczone

$(K1+K2+K3)/3$	Ocena
	3.0
3.25	3.5
3.75	4.0
4.25	4.5
4.75	5.0

# Reprezentacja wektora



$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

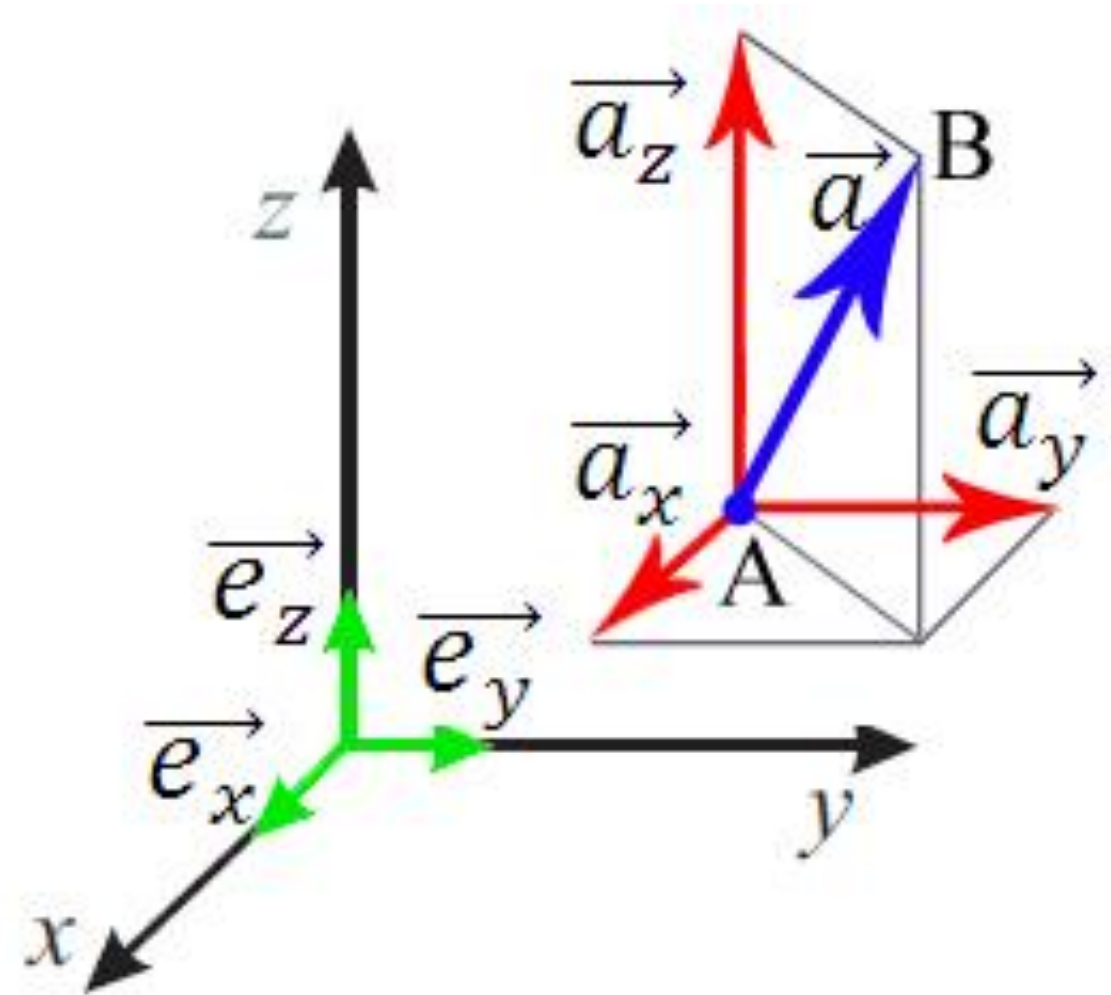
$$\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$$

gdzie:

$$a_x = x_B - x_A$$

$$a_y = y_B - y_A$$

$$a_z = z_B - z_A$$



$$A = (x_A, y_A, z_A)$$

$$B = (x_B, y_B, z_B)$$

# Iloczyn wektorowy



- Operator przyporządkowujący dwóm wektorom wartość **wektorową**.

$$\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$$

- Metoda wyznacznikowa

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}b_y c_z + \vec{j}b_z c_x + \vec{k}b_x c_y +$$

$$-\vec{i}b_z c_y - \vec{j}b_x c_z - \vec{k}b_y c_x$$

- Interpretacja:

- Moment siły  $\vec{F}$  względem punktu O.

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

# Iloczyn wektorowy

- Za pomocą składowych:

$$\vec{a} = \vec{b}_x \times \vec{c} + \vec{b}_y \times \vec{c} + \vec{b}_z \times \vec{c}$$

- Przesunięcie wektora wzdłuż linii działania

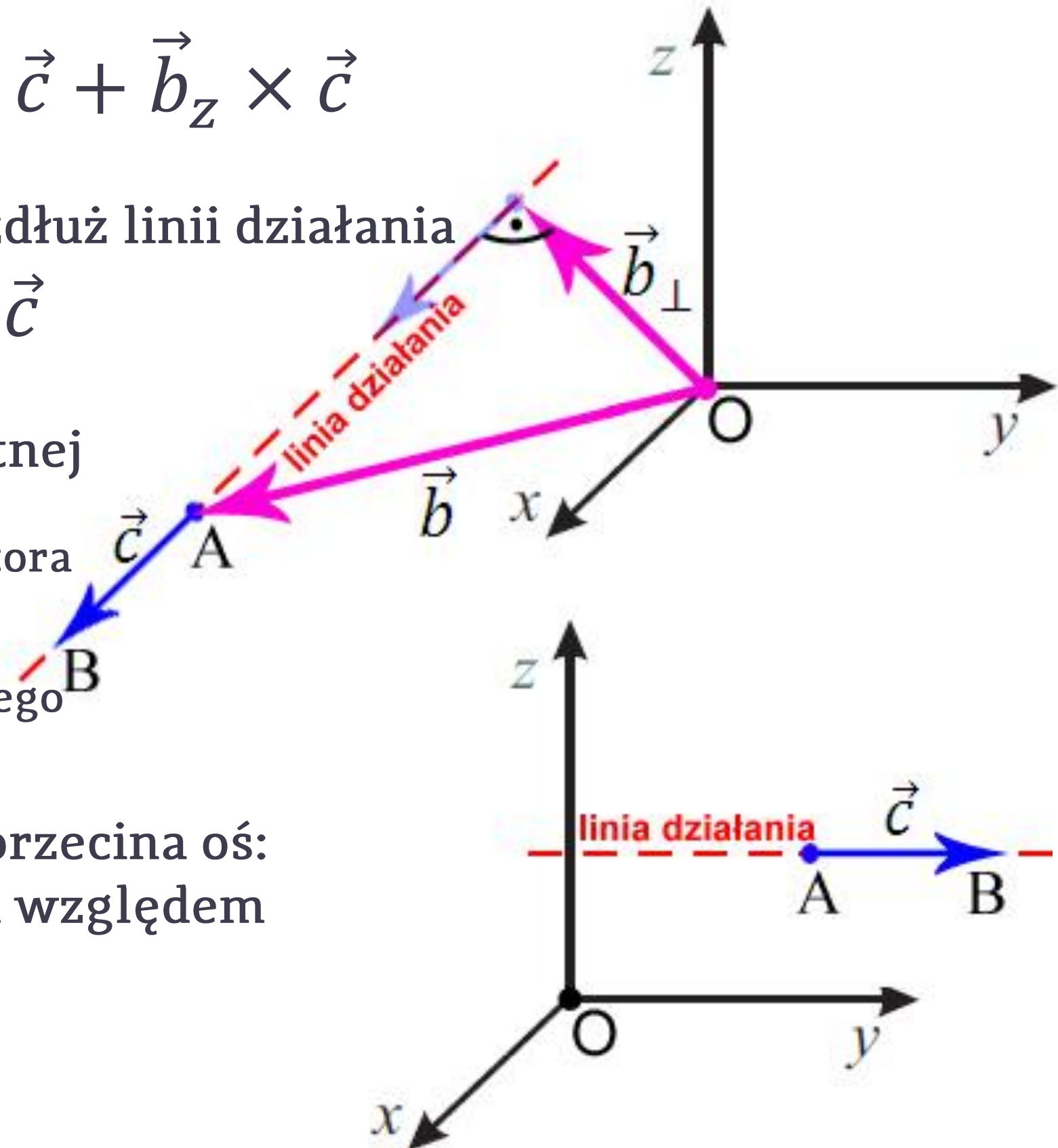
$$\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}_\perp \times \vec{c}$$

- Reguła śruby prawoskrętnej

- Jeżeli obracamy wektor w kierunku drugiego wektora po mniejszym kącie to odchylony kciuk wskaże zwrot iloczynu wektorowego

- Linia działania wektora przecina oś:

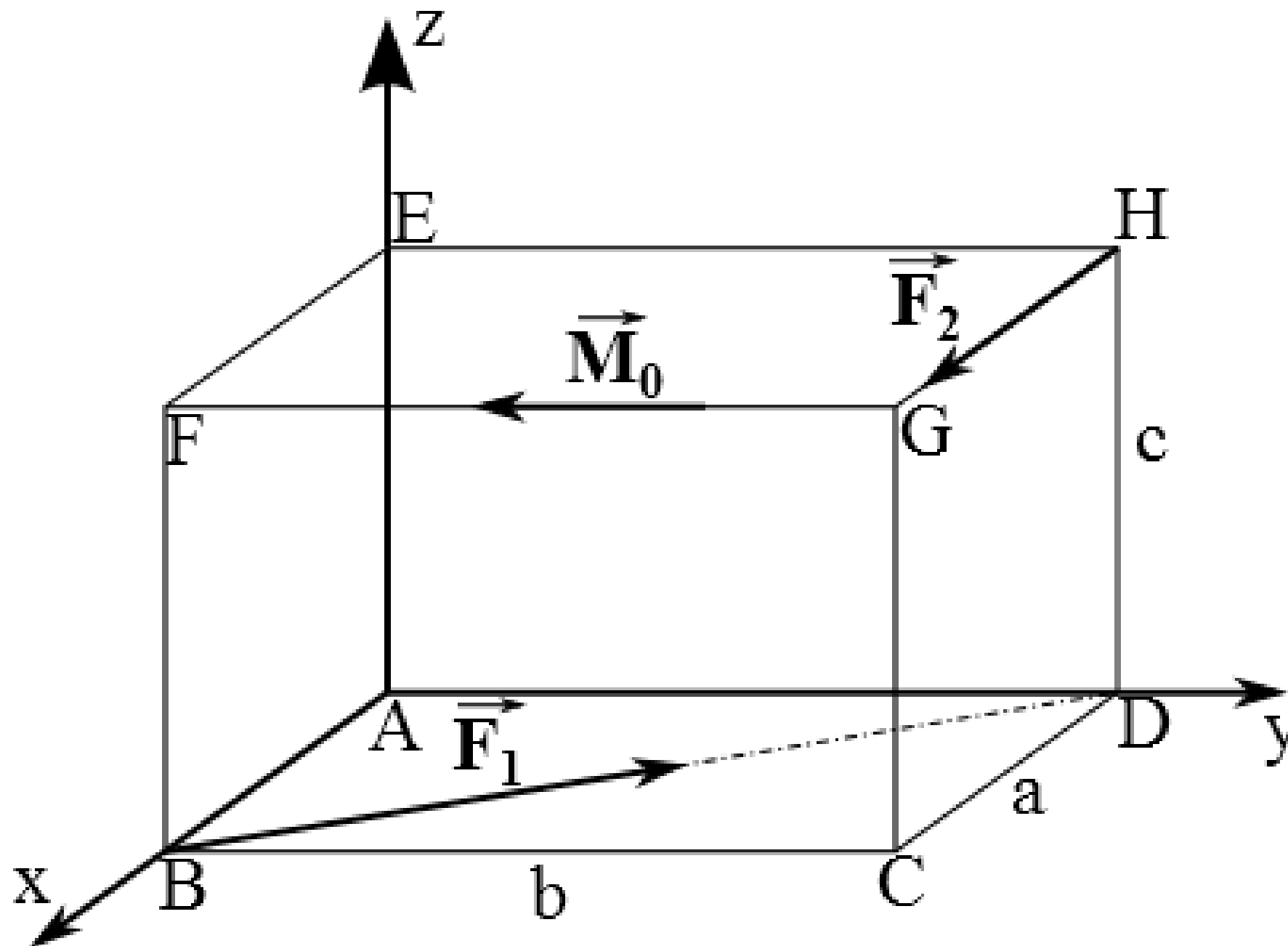
- moment tego wektora względem tej osi wynosi 0



# Zadanie



Oblicz momenty sił  $F_1$  i  $F_2$  względem punktu A. Dane są wymiary geometryczne:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , wartości sił  $F_1$  i  $F_2$  oraz momentu  $M_0$ .



# Redukcja układu

7

Redukcja układu:

- Wektor główny - suma geometryczna wszystkich sił układu

$$\vec{W}_g = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

- Moment główny względem bieguna - suma geometryczna momentów wszystkich sił względem dowolnie wybranego bieguna

$$\vec{M}_{gO} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{iO}$$

- Wypadkowa układu sił - siła zastępująca działanie danego układu sił na bryłę sztywną

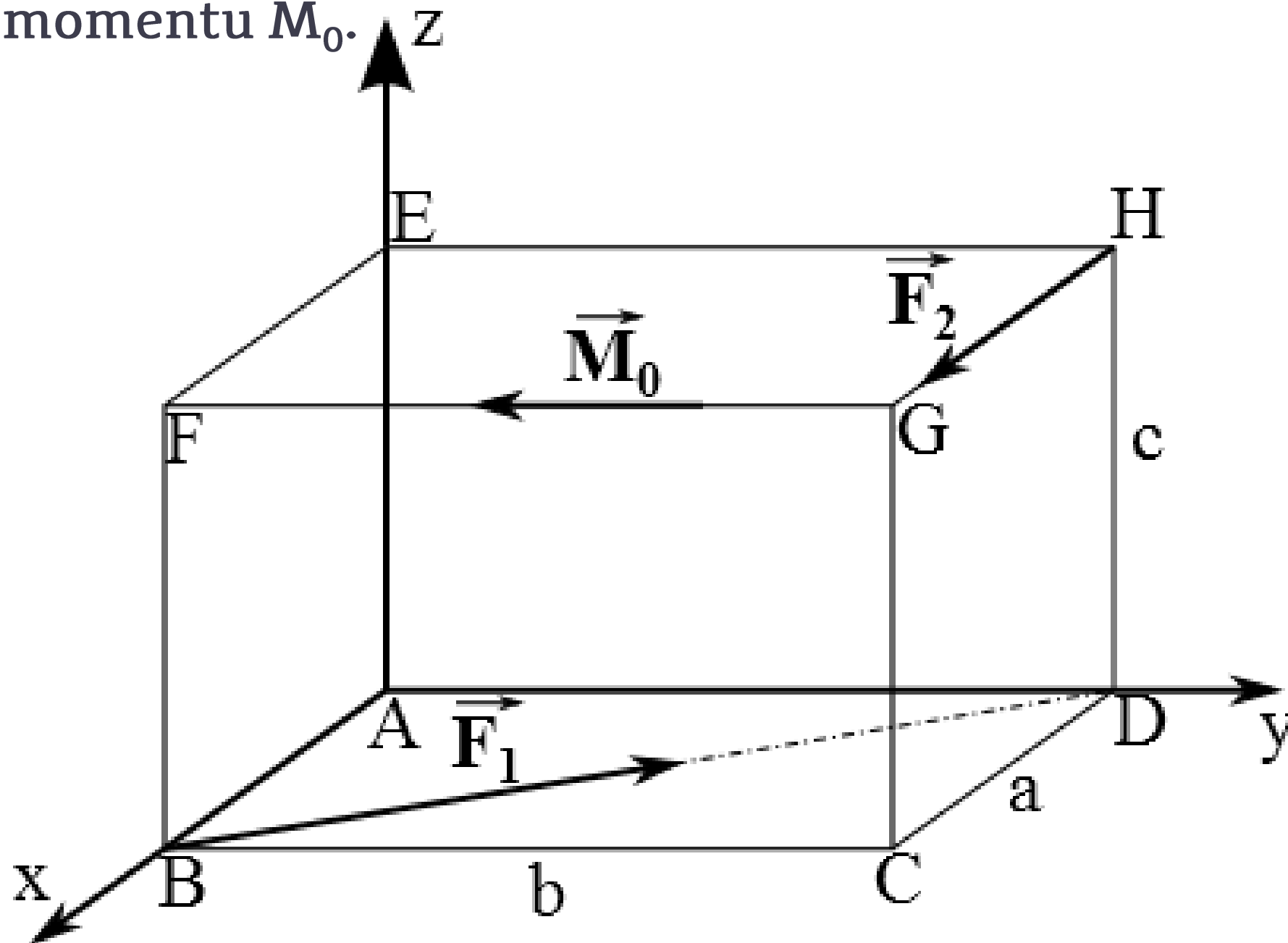
- Warunki równowagi:

$$\vec{W}_g = \vec{0} \quad \vec{M}_{gO} = \vec{0}$$

# Zadanie



Oblicz wektor główny i moment główny względem punktu A.  
Dane są wymiary geometryczne:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , wartości sił  $F_1$  i  $F_2$  oraz momentu  $M_0$ .

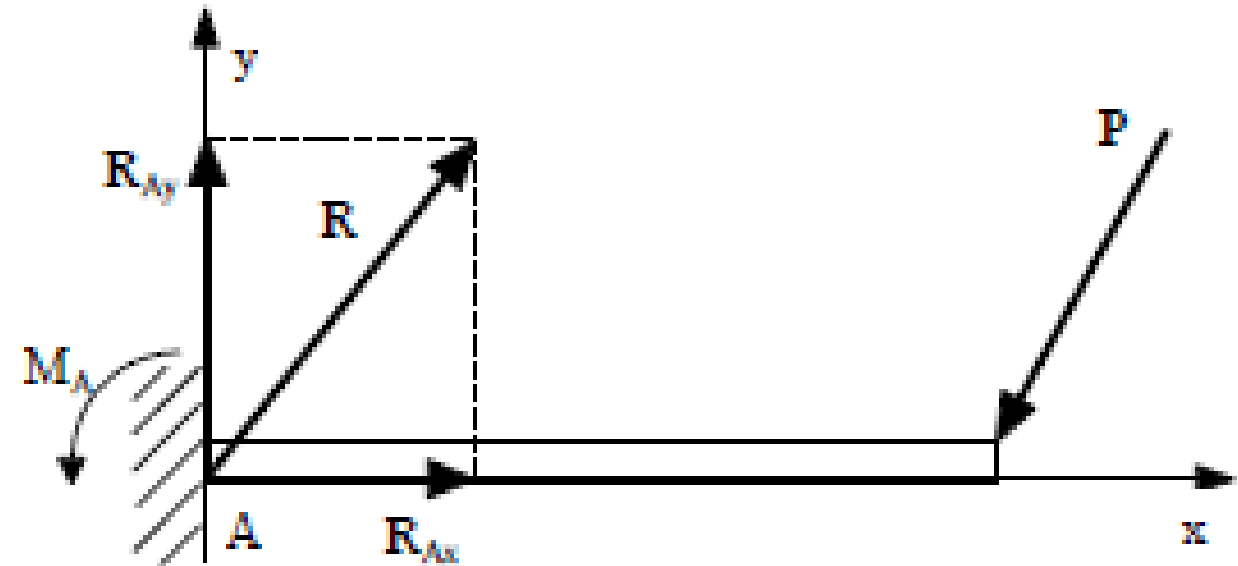
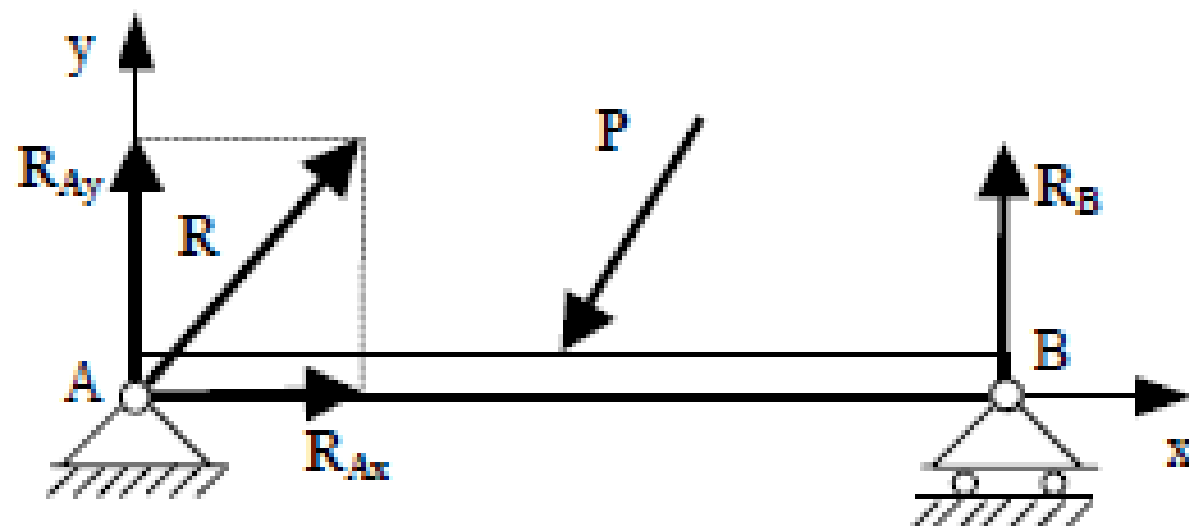




# Więzy



- Oddziaływania, które ograniczają możliwości ruchu ciał w analizowanym układzie.
  - **geometryczne** – ograniczenia położenia w przestrzeni
  - **kinematyczne** – ograniczenia ruchu (np. prędkości)
  
- Uwalnianie od więzów – zastąpienie działania więzów odpowiednimi reakcjami więzów (siły i momenty)

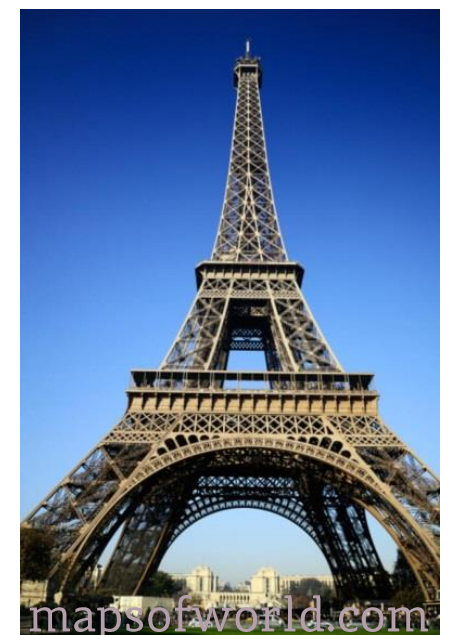
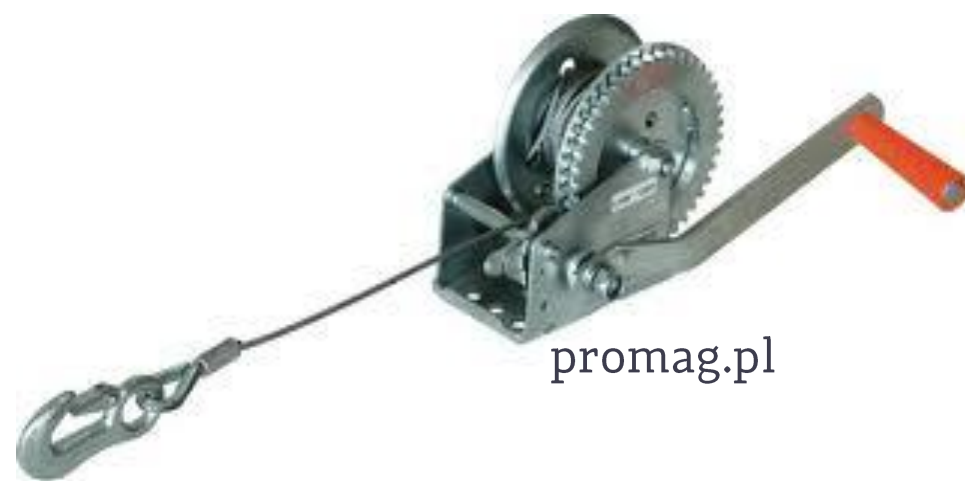
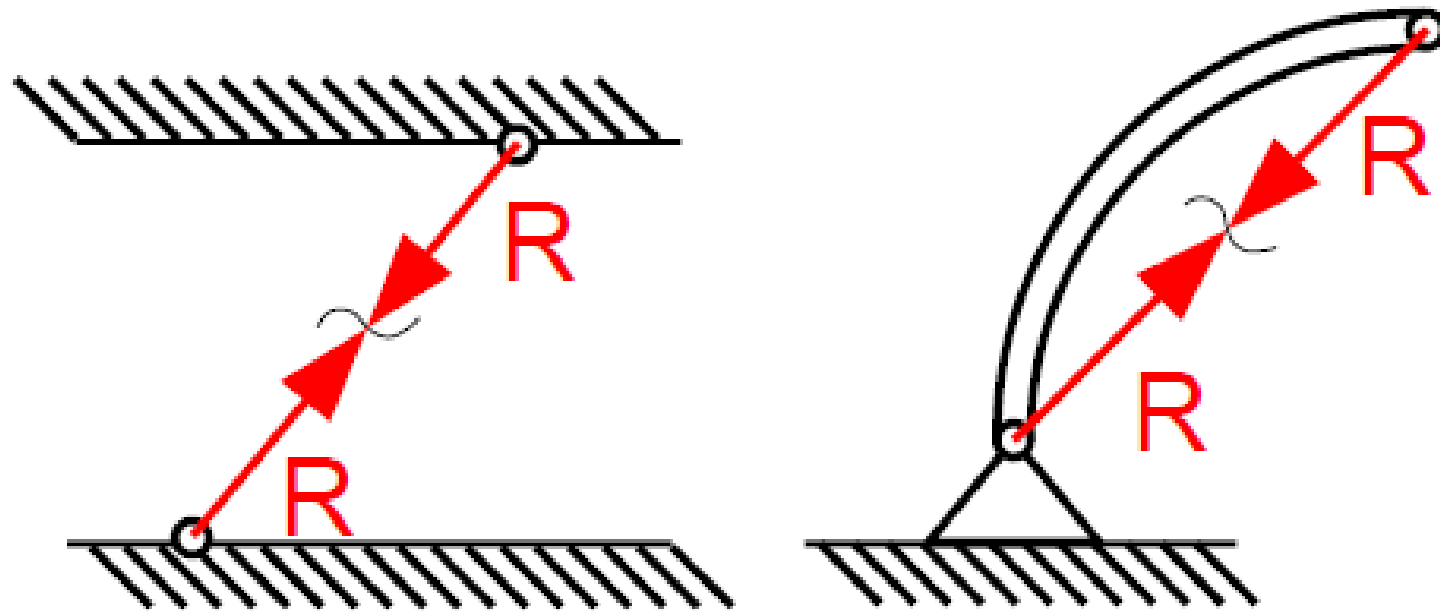


Sałata W., *Mechanika ogólna w zarysie*

# Wybrane przykłady więzów

10

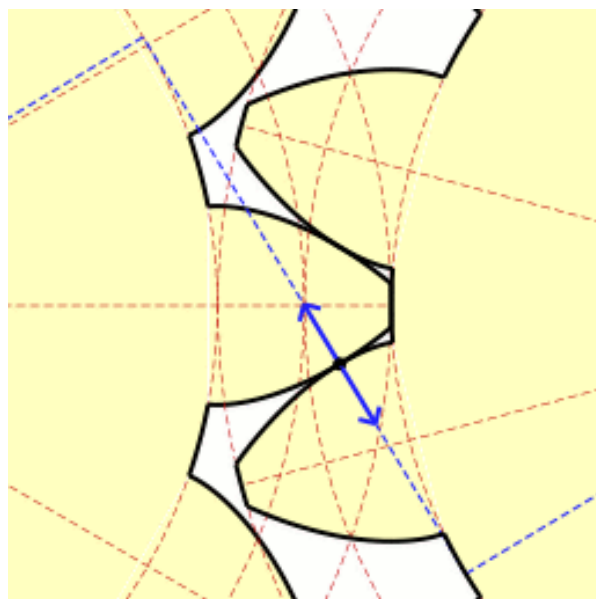
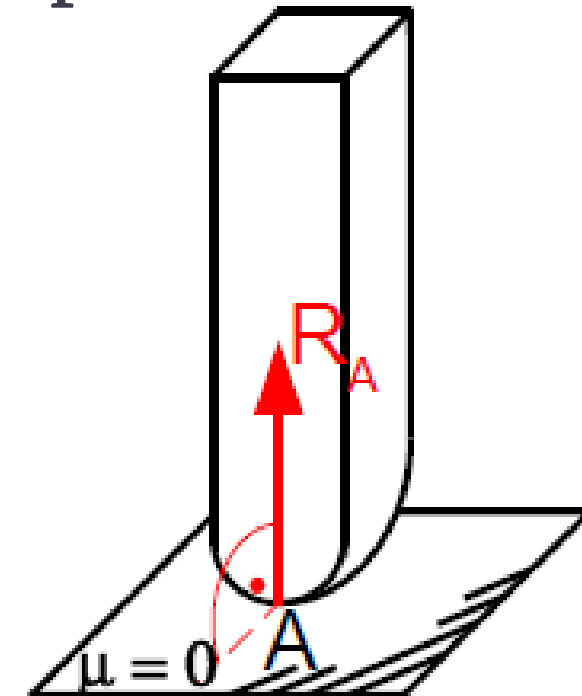
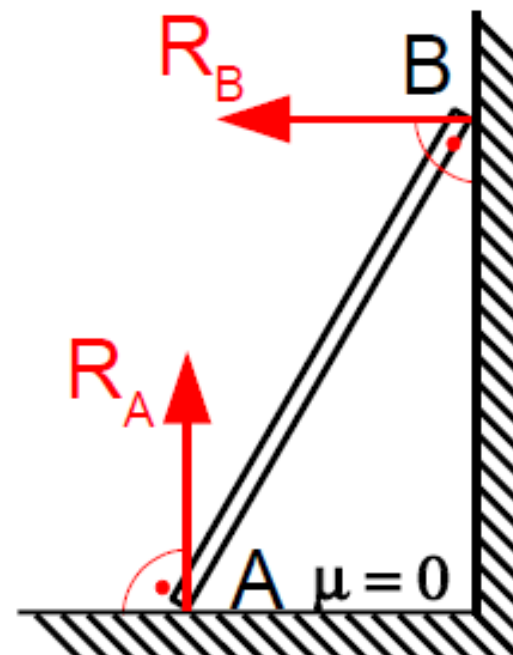
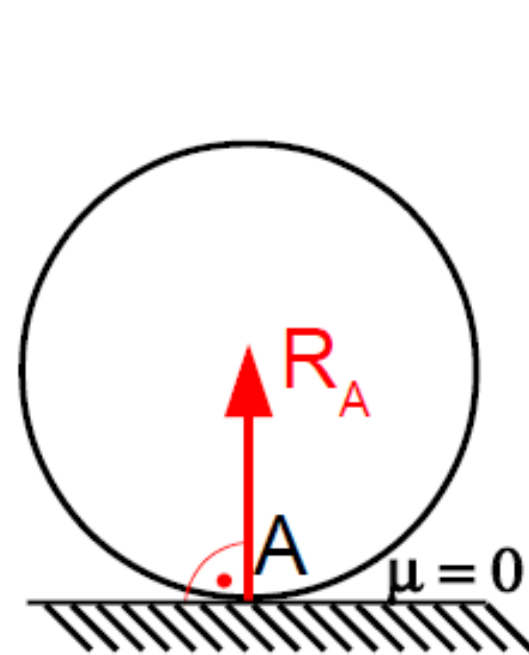
- Ciężno – np. lina, łańcuch – kierunek siły reakcji pokrywa się z prostą łączącą końce ciężna



# Wybrane przykłady więzów



- Ciało oparte o gładką powierzchnię – kierunek działania siły reakcji prostopadły do płaszczyzny, o którą oparto ciało



wikipedia.pl



gearpatrol.com



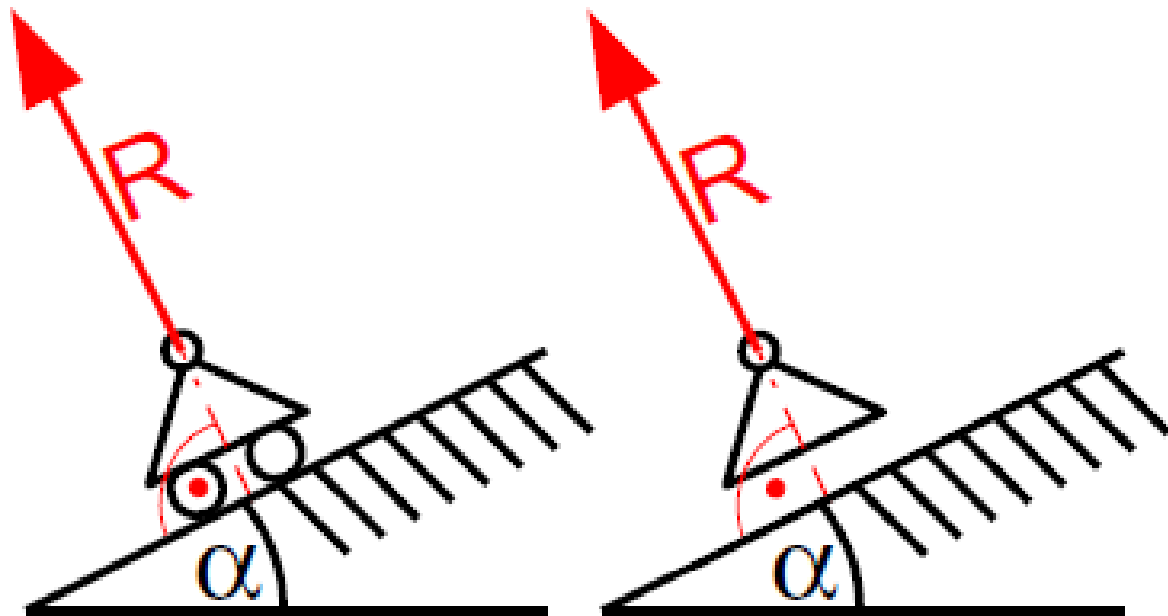
wikimedia.com



# Wybrane przykłady więzów

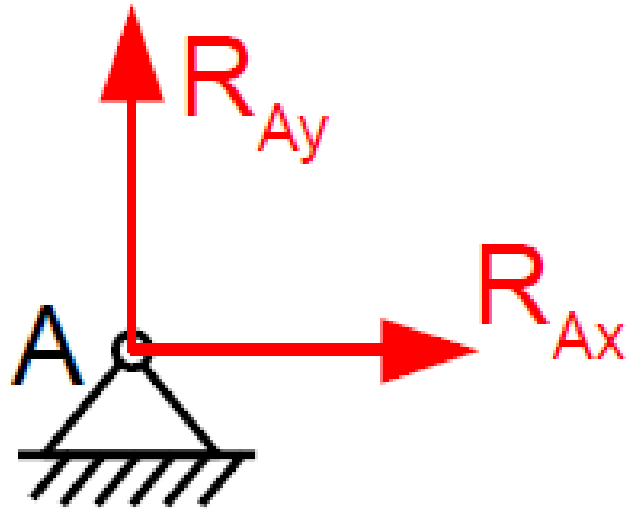
12

- Podpora przesuwna – siła reakcji leży w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku ruchu

[conrad.pl](http://conrad.pl)[dinalager.com.pl](http://dinalager.com.pl)[ceephotokarcor.com](http://ceephotokarcor.com)

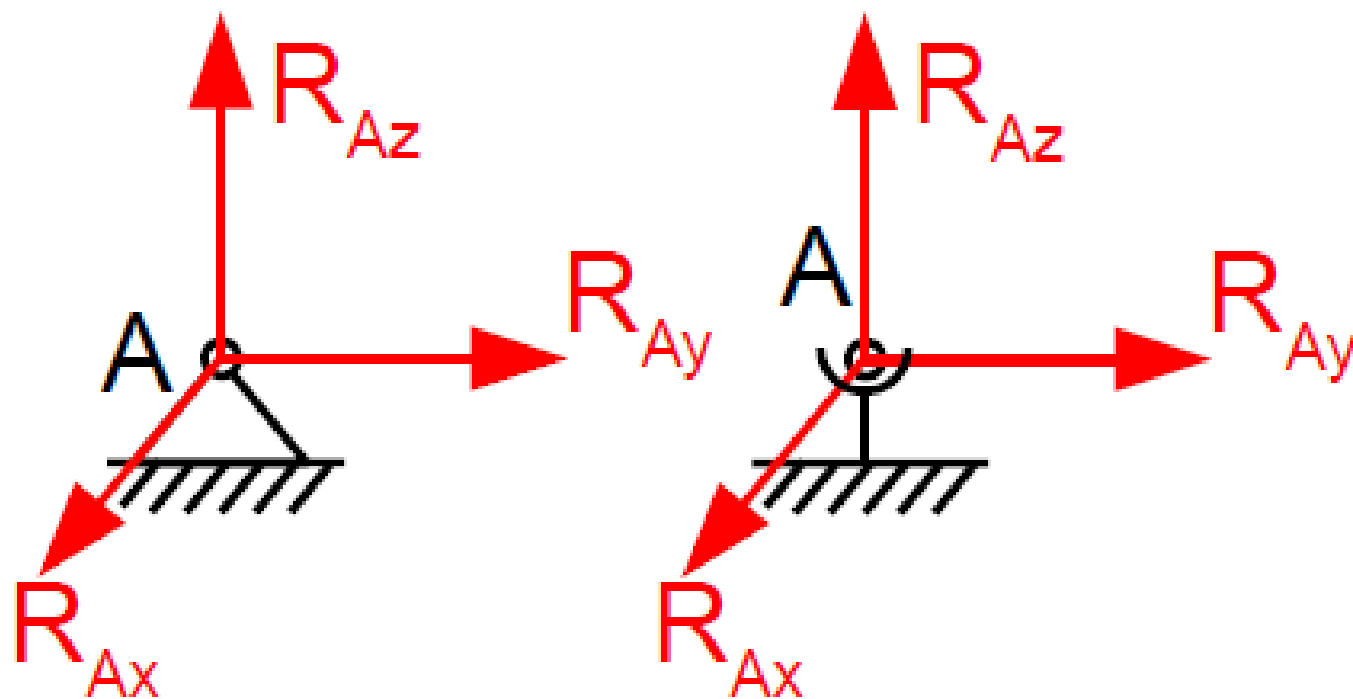
# Wybrane przykłady więzów

- Podpora stała przegubowa/pręty połączone przegubem
  - nie jest znany kierunek działania siły reakcji, siła reakcji przyłożona w środku przegubu
- Przegub walcowy (2D) – siła reakcji leży w płaszczyźnie prostopadłej do osi przegubu



# Wybrane przykłady więzów

- Podpora stała przegubowa/pręty połączone przegubem
  - nie jest znany kierunek działania siły reakcji, siła reakcji przyłożona w środku przegubu
  - Przegub kulisty (3D)



jeep.istore.pl



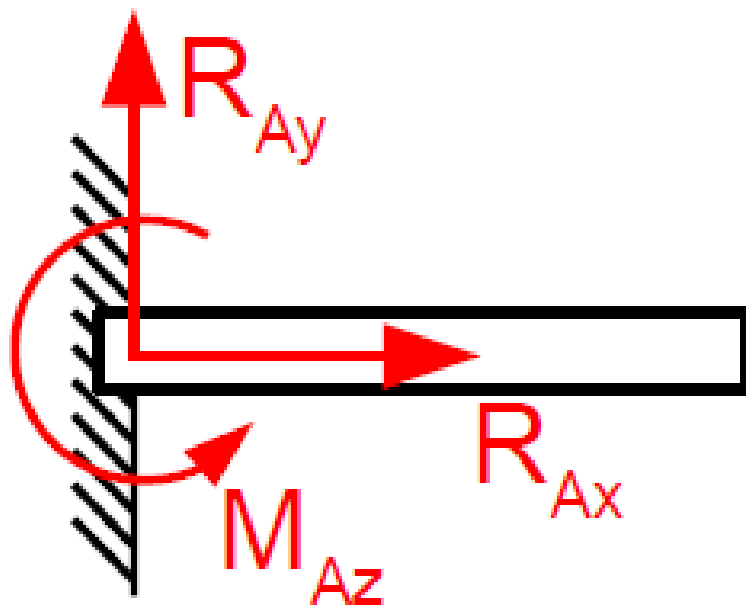
eurobolt.com.pl



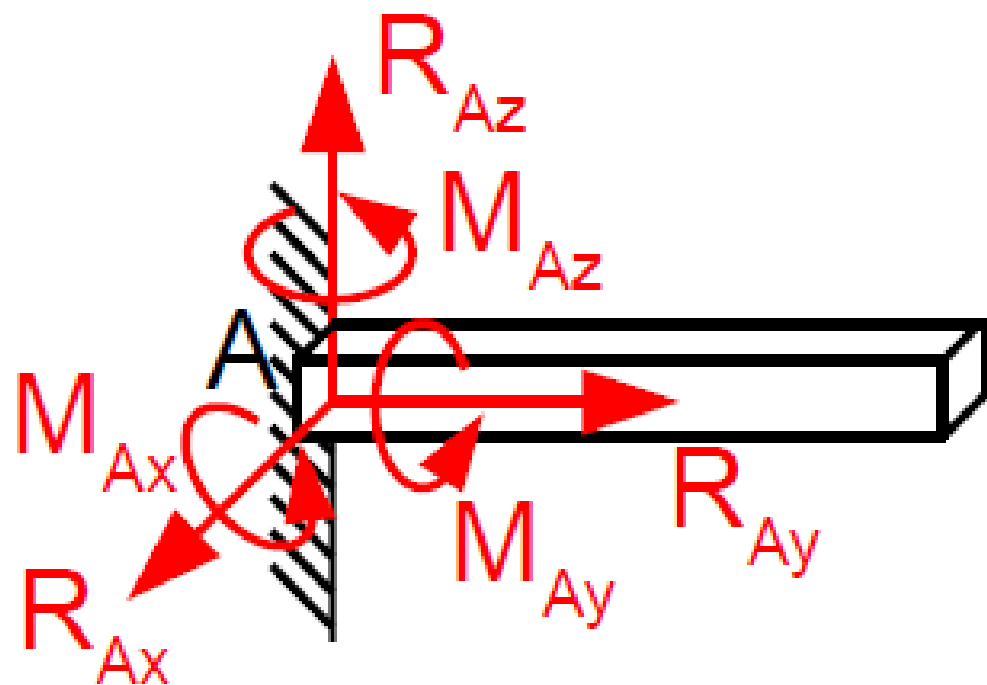
lifeinthefastlane.com

# Wybrane przykłady więzów

- Utwierdzenie – nie jest znany kierunek działania siły reakcji, występuje moment utwierdzenia



airliners.net

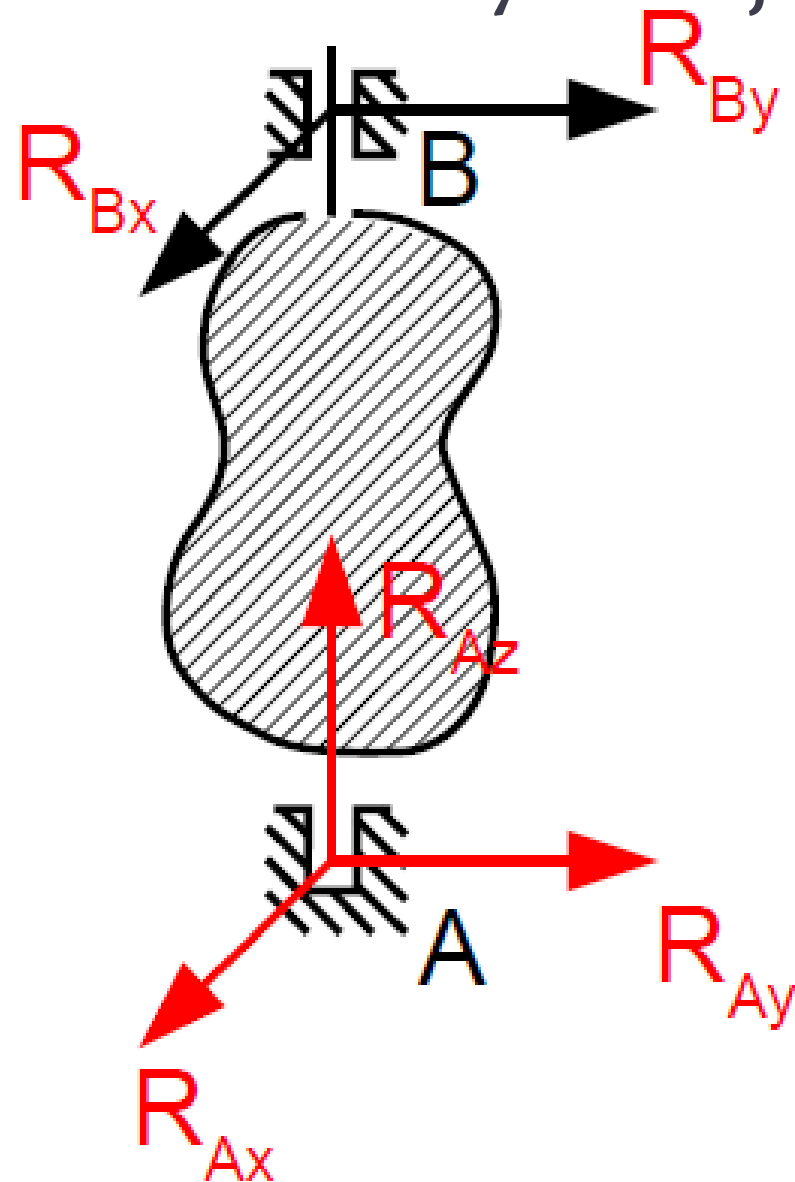


yjcrane.com

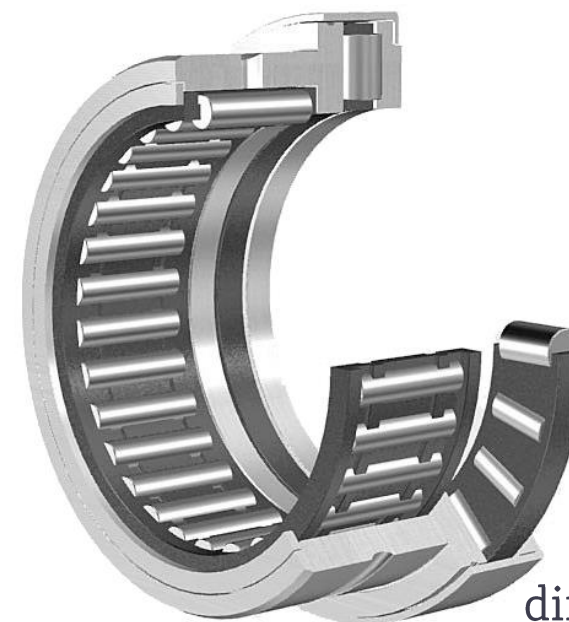


# Wybrane przykłady więzów

- Łożysko poprzeczne (szyjne) – nie jest znany kierunek działania siły reakcji, siła reakcji leży w płaszczyźnie prostopadłej do osi wału
- Łożysko poprzeczno-wzdłużne (oporowe) – nie jest znany kierunek działania siły reakcji



zhusormal.pl



directindustry.com





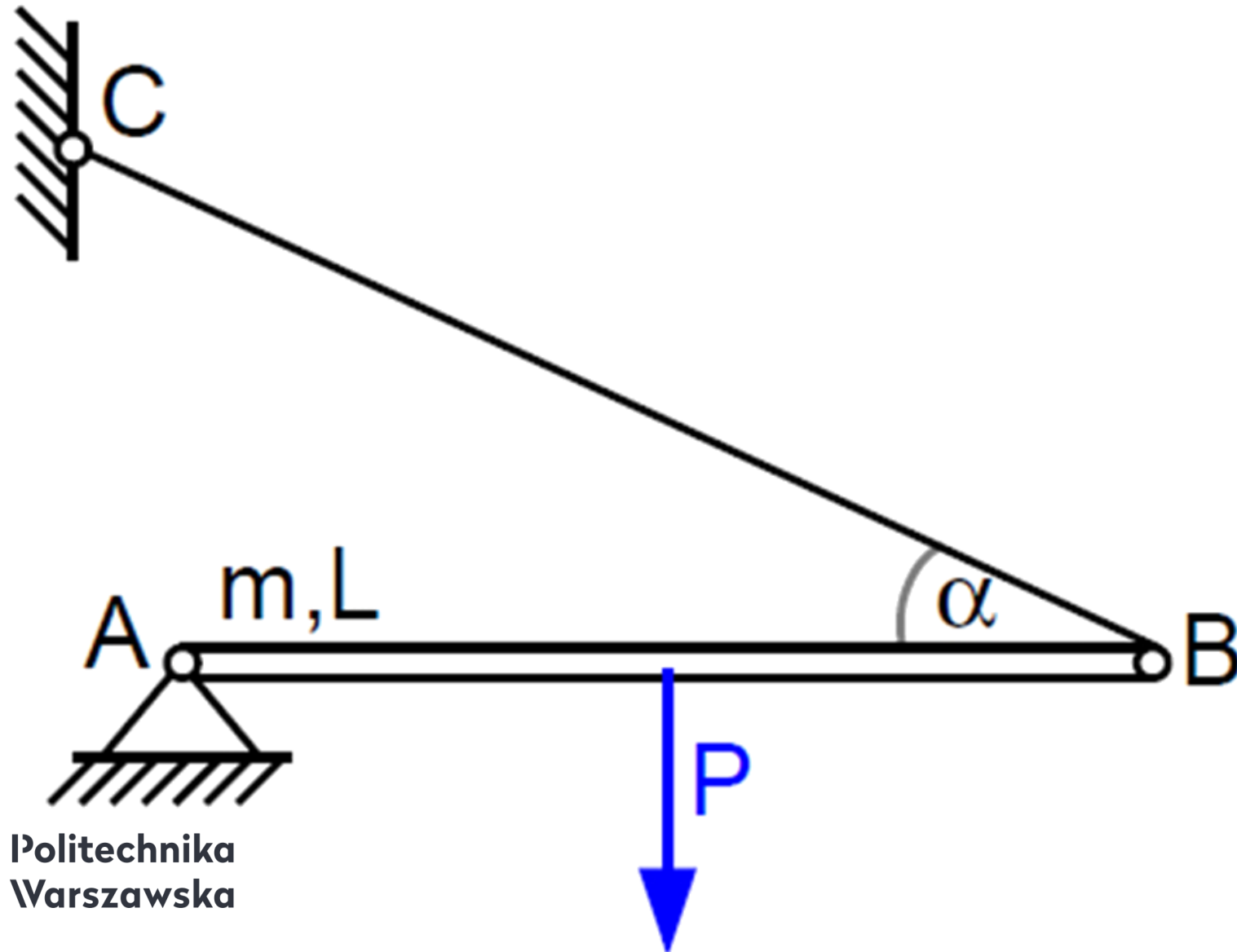
# Więzy

- **Metodyka rozwiązania:**
  - Przyjąć układ współrzędnych
  - Uwolnić od więzów i wprowadzić siły czynne
  - Zapisać warunki równowagi
  - Wprowadzić dodatkowe zależności i rozwiązać układ równań

# Zadanie

18

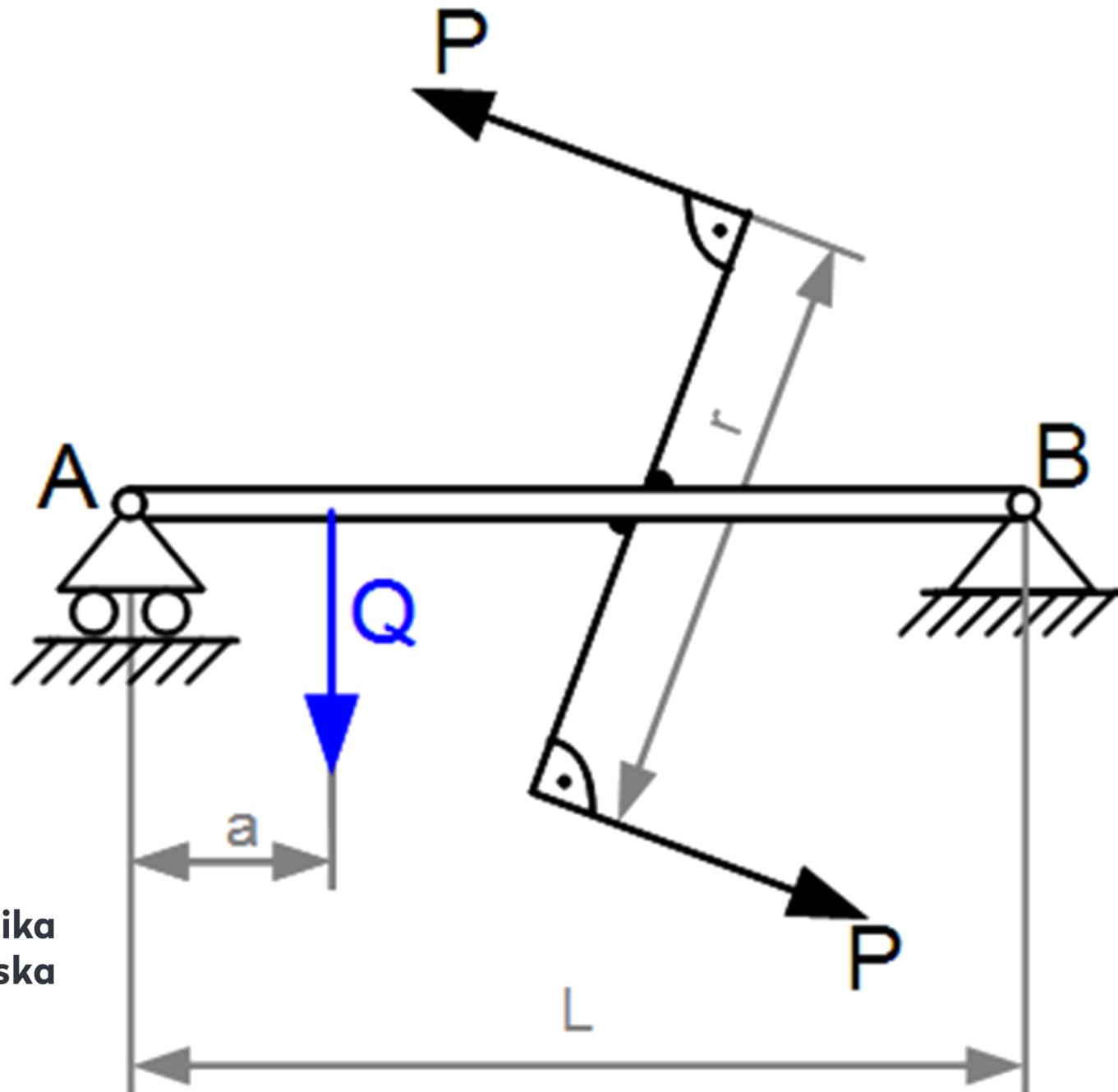
Jednorodna belka o długości  $L$ , ciężarze  $P$  i stałym przekroju poprzecznym została podparta przy pomocy podpory nieprzesuwnej w punkcie A. Belka utrzymywana jest w położeniu poziomym za pomocą nieważkiego cięgna zaczepionego w punkcie B, które tworzy z osią belki kąt  $\alpha$ . Oblicz wartości siły reakcji w punktach A oraz B.



# Zadanie



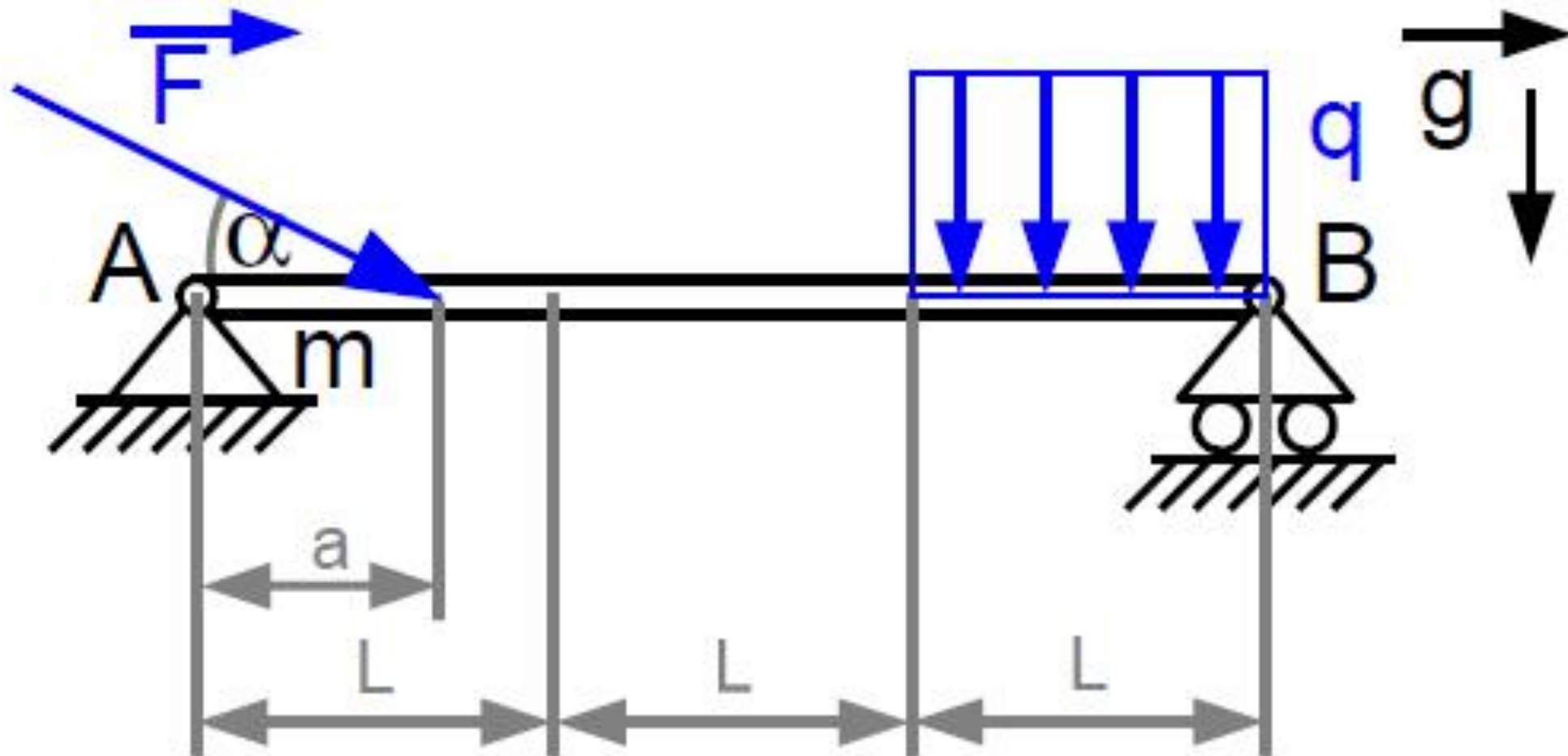
Belka o długości  $L$  i ciężarze  $Q$  została podparta przy pomocy podpory przesuwnej (w punkcie A) i podpory stałej (w punkcie B). Do belki przyspawano także nieważki układ obciążony w sposób pokazany na rysunku. Oblicz siły reakcji w punktach A i B, gdy dane są wartości sił  $P$  i  $Q$  oraz geometria układu – długości:  $r$ ,  $a$ ,  $L$ .



# Zadanie

# 20

Jednorodna belka o masie  $m$ , długości  $3L$  i stałym przekroju poprzecznym została podparta przy pomocy podpory nieprzesuwnej (w punkcie A) i podpory przesuwnej (w punkcie B). Belka obciążona jest siłą  $F$  nachyloną do osi belki pod kątem  $\alpha$  i przyłożoną w odległości  $a$  od punktu A oraz stałym wydatkiem siły  $q$  działającym na długości  $L$ . Oblicz siły reakcji w punktach



# Zadanie

Jednorodny kątownik o wymiarach  $a \times b \times c$  i przekroju kwadratowym został utwierdzony, zaś jego drugi koniec pozostawiono swobodny. Swobodny koniec kątownika obciążono siłą  $P$  oraz momentem siły  $M_0$ . Oblicz siły reakcji w punkcie A (w podanym układzie współrzędnych). Masę kątownika zanedbać.

